Apellidos: _____ **Nombre:** _____

IMPORTANTE

- Duración del examen: **90 minutos**
- No olvide anotar el nombre y los apellidos en todas las hojas de examen, incluido el enunciado de examen
- No se permite ningún tipo de documentación
- Las respuestas se entregarán en hojas de examen
- Se entregarán las hojas de examen, incluido el enunciado de examen, dobladas por la mitad

1. (30 puntos) Considere un sistema de control con realimentación unitaria en el que ya está incluido el elemento de compensación. Si la función de transferencia de la planta queda definida por $G(s) = 7/(s+14)$ y la respuesta en frecuencia del compensador es la mostrada en la figura 1, determine el error en régimen permanente que presenta el sistema realimentado ante una entrada escalón unitaria.

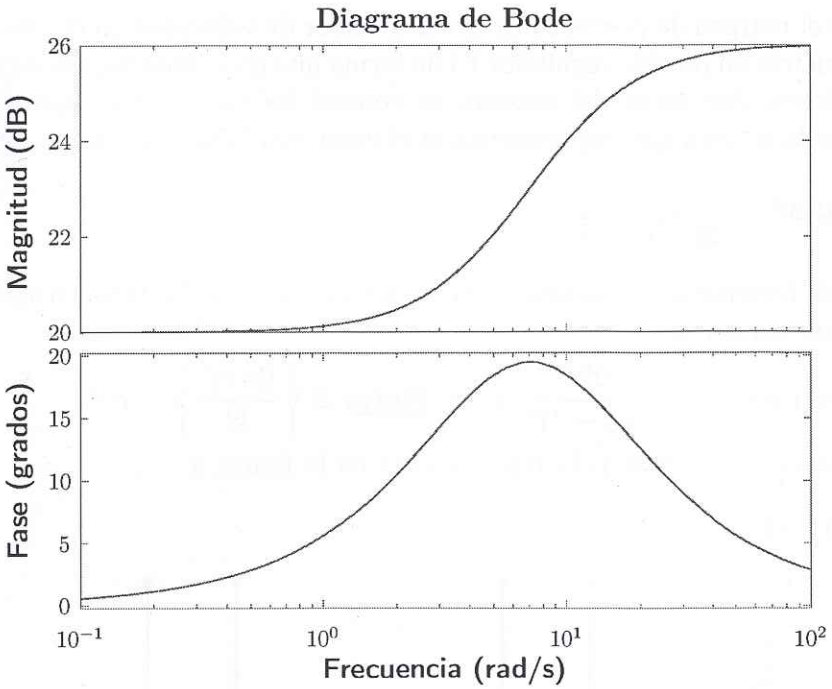


Figura 1: Diagrama de Bode del compensador.

2. (30 puntos) Considere un sistema de control de segundo orden (forma canónica), del que se conoce únicamente la magnitud del diagrama de Bode de su respuesta en lazo cerrado, representada en la figura 2.

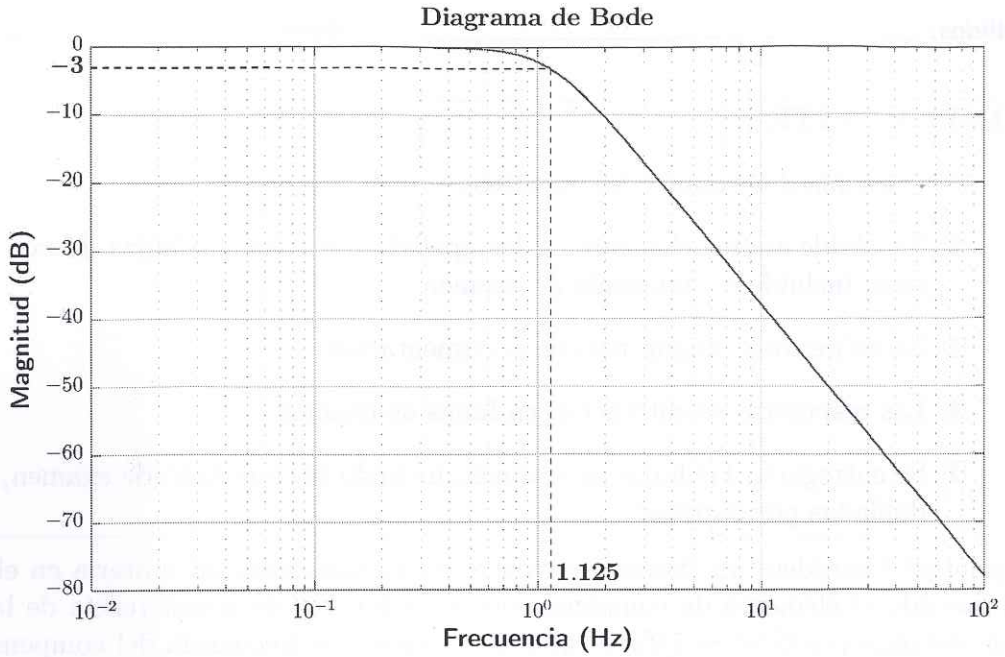


Figura 2: Magnitud del diagrama de Bode de un sistema de control de segundo orden.

Determine el margen de precisión (mejora del error de velocidad en régimen permanente) que introduciría un posible regulador PI de forma que no se modifiquen significativamente las condiciones dinámicas del sistema de control indicadas en la figura 2. Exprese en porcentajes la mejora que experimentaría el error con la incorporación del regulador PI.

Nota: $M_r = \dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$.

3. (40 puntos) Determine la solución, en forma cerrada, de la transformada z de las siguientes funciones $f(k)$.

   (a) (20 puntos) $f(k) = \dfrac{2^{k+1}}{(k-1)!} \cdot u(k)$. **Nota:** $\mathcal{Z}\left\{\dfrac{(\ln c)^k}{k!}\right\} = c^{1/z}$.

   (b) (20 puntos) La señal $f(k)$ representada en la figura 3.

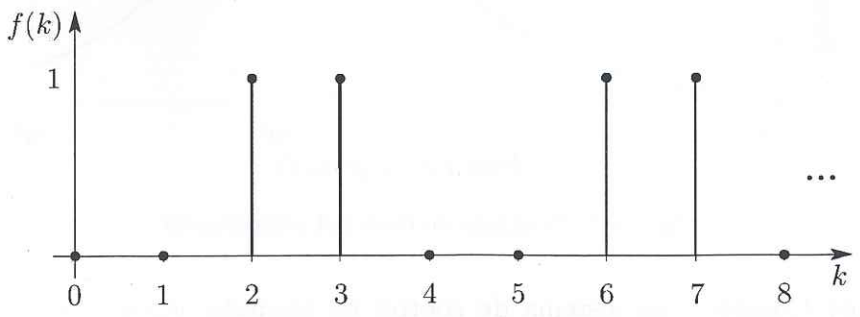


Figura 3: Señal en tiempo discreto $f(k)$.

Universidad de Alcalá

Apellidos:	Pág.:
Nombre:	Fecha:
Titulación:	
Asignatura:	Curso / grupo:

(1)

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0.16$$

$$K_p = \lim_{s \to 0} G_R(s) \cdot G(s) = \lim_{s \to 0} K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \cdot \frac{7}{(s + 14)}$$

$$= K_c \alpha \cdot \frac{7}{14} = \frac{K_c \alpha}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Universidad de Alcalá

Apellidos:	Pág.:
Nombre:	Fecha:
Titulación:	
Asignatura:	Curso / grupo:

(2)

$$\frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2}$$

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

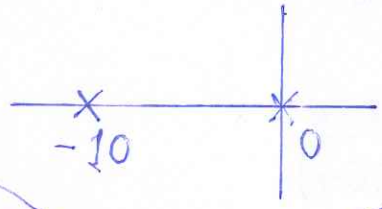
$$w_n = 5\cdot\sqrt{2}\ \text{rad/s}$$

$$s_d = -\zeta w_n \pm w_n\sqrt{1-\zeta^2}\,j$$

$$= -5 \pm 5j$$

$$\frac{50}{s^2 + 10s + 50}$$

EN LAZO ABIERTO



$$\frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s}$$

$$w_c = 0.1 \times 10 = 1$$

$$w_p = \frac{1}{\beta} = \beta^{-1}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} \frac{s\cdot w_n^2}{s^2 + 2\zeta w_n s} = \lim_{s\to 0} \frac{w_n^2}{s + 2\zeta w_n} = \frac{w_n}{2\zeta} = 2.5$$

$$-5^\circ < \left/ \frac{s + w_c}{s + w_p} \right._{s_d} < 0^\circ \qquad -5^\circ < \theta_{w_c} - \theta_{w_p} < 0^\circ$$

$$-5^\circ - \theta_{w_c} < -\theta_{w_p} < -\theta_{w_c}$$

$$\theta_{w_c} \cong 129^\circ$$

$$\theta_{w_c} + 5^\circ > \theta_{w_p} > \theta_{w_c}$$

$$129 + 5^\circ > \theta_{w_p} > 129$$

$$(2.3387)$$

$$\theta_{w_p} = \tan^{-1}\frac{5}{(5 + w_p)} > 129^\circ \rightarrow \frac{5}{(5 + w_p)} > 1{,}1518$$

$$(2.2455)$$

$$\frac{5}{(+5-w_p)} > 1.1518 \rightarrow \frac{5}{1,1518} - 5 > -w_p$$

$$-0.66 > -w_p \rightarrow w_p > 0.66 \quad (\beta < 1.517)$$

$$\frac{5}{(+5-w_p)} < 1,166 \rightarrow \frac{5}{1,166} - 5 < -w_p$$

$$-0.715 < -w_p \rightarrow w_p < 0.715 \quad (\beta > 1.399)$$

$$\beta = \frac{K_{VD}}{K_{VP}} \qquad e_i = \frac{1}{2.5} = 0.4$$

$$1.399 < \beta < 1.517$$

$$3.4975 < K_{VD} < 3.7925$$
$$(0.286) \qquad (0.264)$$
$$0.264 < e_V < 0.286$$

34% — 28.5%

REDUCCIÓN DEL ERROR

Universidad de Alcalá

Apellidos:	Pág.:
Nombre:	Fecha:
Titulación:	
Asignatura:	Curso / grupo:

(3)

$$\frac{1}{(k-1)!}\cdot 2^{k+1}\cdot u(k) = \frac{k\cdot k^{-1}}{(k-1)!}\cdot 2^{k+1}\cdot u(k)$$

$$= \frac{k}{k!}\cdot 2^{k}\cdot 2\cdot u(k)$$

$$= 2\cdot k\cdot \frac{2^k}{k!}, \quad k\geq 0$$

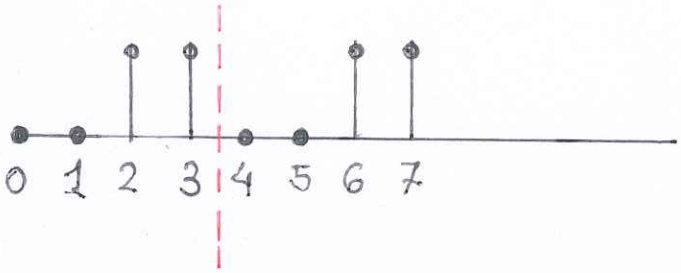
$$\mathcal{Z}\left\{\frac{2^k}{k!}\right\} = \mathcal{Z}\left\{\frac{(2ne^2)^k}{k!}\right\} = e^{2/z}$$

$$2\cdot \mathcal{Z}\left\{k\cdot\frac{2^k}{k!}\right\} = 2\cdot(-z)\cdot\frac{de^{2/z}}{dz} = -2z\cdot\left(-\frac{2}{z^2}\right)\cdot e^{2/z}$$

$$= 4\cdot z^{-1}\cdot e^{2z^{-1}}$$

Universidad de Alcalá

Apellidos:	Pág.:
Nombre:	Fecha:
Titulación:	
Asignatura:	Curso / grupo:



$$u(k-2) - u(k-4) = y(k)$$

$$x(k) = \sum_{i=0}^{\infty} y(k - i\cdot 4)$$

$$Z\{y(k)\} = \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-4}}{1-z^{-1}} = \frac{z^{-2}(1-z^{-2})}{1-z^{-1}}$$

$$Z\{x(k)\} = \sum_{i=0}^{\infty} z^{-i\cdot 4} Y(z) = \left(1 + z^{-4} + z^{-8} + \cdots\right) Y(z)$$

$$a = z^{-4} \rightarrow Z\{x(k)\} = \left(1 + a + a^2 + \cdots\right) Y(z)$$

$$= \frac{1}{1-a} \cdot Y(z)$$

$$= \frac{1}{1-z^{-4}} \cdot Y(z)$$

$$= \frac{1-z^{-2}}{1-z^{-4}} \cdot \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}}$$